УДК 528.063

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ УРАВНИВАНИЯ, ПОЛУЧЕННЫХ ПО ДВУМ ПОЛЯРНЫМ МЕТОДИКАМ ПРИ ОБРАБОТКЕ ПЛАНОВЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

А.Ю. БУДО
(Полоцкий государственный университет)

Рассматриваются две полярные методики уравнивания плановых геодезических сетей триангуляции и линейно-угловых построений нетрадиционными способами: метод Lp-оценок и многокритериальный способ уравнивания для обработки зависимых и независимых результатов измерений. Способы уравнивания зависимых результатов измерений называются обобщенными. Хорошо известен обобщенный метод наименьших квадратов, но с 2006 года в литературе стали рассматриваться обобщенные методы Lp-оценок и обобщенный многокритериальный метод уравнивания. Если результаты измерений независимые, то применение алгоритмов обобщенных методов уравнивания должны привести к тем же результатам математической обработки, что и методы, рассчитанные только на обработку независимых измерений. В последнем случае возможно нелинейное уравнивание Lp-оценок и многокритериального метод, но, как показали исследования, это уравнивание не дает однозначные результаты при обработке зависимых измерений.

Введение. Математическая обработка результатов геодезических измерений, как правило, выполняется по методу наименьших квадратов (МНК). Однако оценки метода наименьших квадратов остаются оптимальными в классе всех линейных несмещенных оценок только при условии, что ошибки результатов измерений подчинены нормальному закону распределения [1]. Но для локальных геодезических сетей при малой выборке измерений закон распределения установить невозможно и, следовательно, невозможно утверждать, что оценки МНК будут оптимальными. При этом целесообразно использовать нетрадиционные методы уравнивания, но только те из них, которые дают оптимальные, состоятельные и несмещенные оценки. Такими способами уравнивания являются многокритериальные методы (МК), разработка которых стала возможной после внедрения в практику уравнивания метода Lp-оценок. Как показали исследования, сам метод Lp-оценок не является оптимальным и, в основном, использовался в процессе уравнивания с разными степенями: $n = 1$ (метод наименьших модулей); $n = 1 – 2$ и $n > 2$. При $n = 2$ результаты уравнивания по методу Lp-оценок полностью совпадают с оценками МНК.

В данной работе сопоставляются результаты оценки точности при уравнивании плановых геодезических сетей различными нетрадиционными способами (Lp-оценок и МК) при независимых и зависимых результатах измерений по двум полярным методикам обработки. К первой методике уравнивания относятся алгоритмы, предназначенные только для обработки независимых результатов измерений. Сюда входят программы:

- OOO – реализующая метод Lp-оценок в нелинейном виде;
- OPTNJDW – предназначенная для реализации нелинейной двухкритериальной оптимизации;
- OPTNJTR – для трёхкритериальной оптимизации;
- OOPBUDO – реализующая методы Lp-оценок и МК-метод для двух и трёх критериев обработки в линейном виде уравнивания.

Ко второй методике уравнивания [2] относятся линейные алгоритмы, реализующие обобщённые методы обработки с использованием корреляционной матрицы для результатов измерений. Сюда входят программы:

- KEMNIOOO – реализующая обобщённый метод Lp-оценок;
- KEMNIMMM, – предназначенная для реализации обобщённой двухкритериальной оптимизации;
- TREX3 – для обобщённой трёхкритериальной оптимизации.

Если корреляционная матрица результатов измерений диагональная (результаты измерений некоррелированные), то для одного и того же примера результаты уравнивания по двум методикам обработки должны давать близкие результаты ошибок положения пунктов внутри метода Lp-оценок и метода МК.

1. Оценка точности положения пунктов в нетрадиционных методах уравнивания

1.1. Нелинейный метод Lp-оценок

Здесь используется целевая функция

$$\Phi\ X\ = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}_{n_i} \left| L_i\ \ X \right|^{n}, \tag{1}$$

где $P_{n_i} = \left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^n$ – вес результатов измерений; N – количество измерений; σ – стандарт измерений; *n* – показатель степени (при *n* = 1 имеем МНМ, при *n* = 2 применяется МНК, возможны разные *n*); L(X) – свободный член нелинейного параметрического уравнения; *X* – вектор координат пунктов.

Ошибки положения пунктов M рассчитываются с помощью матрицы обратных весов, получаемой по формуле:

$$Q = F P_n^{-1} F^{\mathrm{T}}, \tag{2}$$

где *F* – матрица первых частных производных целевой функции (1). Матрицу *F* можно вычислить по формуле:

$$F_{\mathrm{K},i} = \frac{\mathrm{X}_{i\,\mathrm{K}} - \mathrm{X}_{\mathrm{K}}}{\delta_i}. \tag{3}$$

Здесь *K* – номер параметра; X – уравненные значения параметров; X_i – уравненные значения параметров после изменения *i*-того измерения на величину δ_i, вычисляемую по формулам:

- для введения поправки в измеренную сторону

$$\delta_S = \frac{\sqrt{S_i}}{m/3}, \tag{4}$$

где S – длина стороны, м; *m* – число, характеризующее разрядную сетку ЭВМ;

- для введения поправки в измеренное направление имеем

$$\delta''_{\mathrm{H}} = \frac{\delta_{S_i}\rho''}{S_i}, \tag{5}$$

где ρ″ = 206265″.

1.2. Линейный метод Lp-оценок

Целевая функция в матричном виде будет такой:

$$\Phi_1\ \mathrm{X}\ = \left(\left|L\ \mathrm{X}\right|^{\frac{n}{2}}\right)^{\mathrm{T}} P_n \left|L\ \mathrm{X}\right|^n; \tag{6}$$

матрица $F_{\mathrm{K}\times\mathrm{N}}$ будет имеет вид:

$$F = \ \mathrm{A}^{\mathrm{T}} C \mathrm{A}\ ^{-1} \mathrm{A}^{\mathrm{T}} C, \tag{7}$$

где $\mathrm{A}_{\mathrm{N}\times\mathrm{K}}$ – матрица коэффициентов линейных параметрических уравнений; *C* – весовая матрица, вычисляемая по формуле:

$$C = P_n\ diag\left|L\ \mathrm{X}\right|^{n-2}\ . \tag{8}$$

Матрица обратных весов *Q* вычисляется по формуле (2) с применением *F*, найденной по формуле (7).

1.3. Нелинейный и линейный многокритериальные способы уравнивания

В нелинейном случае используется целевая функция (1) и функция

$$\Phi_2\ \mathrm{X}\ = \min\ \max\ \mathrm{M}\ , \tag{9}$$

а для оценки точности применяются формулы (3) – (5).

Вес результата измерения находится по формуле

$$P_{n_i} = \left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^{n_i}.$$

В линеаризованном варианте МК метода применяются целевые функции (6), (9), а вместо (8) используется формула

$$C_i = n_i \;\; n_i - 1 \;\; \mathrm{P}_{n_i} \left| L_i \;\; \mathrm{X} \;\; \right|^{n_i - 2}. \tag{10}$$

В нелинейном и линейном трёхкритериальном МК методе применяется дополнительная целевая функция

$$\Phi_3 \;\; \mathrm{X} \;\; = \min \;\; \max \;\; \mu\mathrm{M} \;\; , \tag{11}$$

где средняя квадратическая ошибка

$$\mu = \sqrt{\frac{V_n^{\mathrm{T}} \mathrm{P}_n V_n}{r}}, \tag{12}$$

r – количество избыточных измерений.

1.4. Линейный обобщённый метод Lp-оценок и обобщенный многокритериальный способ

Целевая функция будет такой [2]:

$$\Phi_1 \;\; \mathrm{X} \;\; = \left(\left| L \;\; \mathrm{X} \;\; \right|^{\frac{n}{2}} \right)^{\mathrm{T}} \mathrm{K}_n^{-1} \left| L \;\; \mathrm{X} \;\; \right|^{\frac{n}{2}}, \tag{13}$$

где

$$\mathrm{K}_n^{-1} = \mathrm{P}_n^{\frac{1}{2}} R^{-1} \mathrm{P}_n^{\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

$\mathrm{R}_{\mathrm{N} \times \mathrm{N}}$ – корреляционная матрица результатов измерений.

Для оценки точности применяется формула (2), в которой

$$F_{\mathrm{K} \times \mathrm{N}} = \mathrm{H}^{-1} \mathrm{A}^{\mathrm{T}} C_2, \tag{15}$$

где матрица Гессе $\mathrm{H}_{\mathrm{K} \times \mathrm{K}}$ и весовая матрица $(\mathrm{C}_2)_{\mathrm{N} \times \mathrm{N}}$ вычисляются по формулам, приведенным в [2].

Вместо равенства (12) будем иметь

$$\mu = \sqrt{\frac{V_n^{\mathrm{T}} \mathrm{K}_n^{-1} V_n}{r}}. \tag{16}$$

В случае обобщённого МК метода используются функции $\Phi_1(\mathrm{X})$ – см. формулу (13); $\Phi_2(\mathrm{X})$ – см. выражение (9); $\Phi_3(\mathrm{X})$ – см. формулу (11).

При этом

$$F_{\mathrm{K} \times \mathrm{N}} = \mathrm{H}^{-1} \mathrm{A}^{\mathrm{T}} diag \left(\frac{2}{n_i n_i} \right) C_2, \tag{17}$$

что позволяет выполнить оценку точности.

2. Анализ результатов уравнивания

В нелинейном методе Lp-оценок (первая методика уравнивания) используются формулы (1) – (5), реализованные в программе ООО. Результаты вычислений помещены в таблицах 1 – 4 в колонке 4 с порядковыми номерами: 1 (n = 2,0); 2 (n = 1,5); 3 (n = 2,5); двухкритериальный нелинейный способ МК (порядковый номер 4 в таблицах 1 – 4) реализован в программе OPTNNJDW. Трёхкритериальный нелинейный способ МК (порядковый номер 5 в таблицах 1 – 4), использован в программе OPTNNJTR.

Линейный метод Lp-оценок и МК по первой методике уравнивания реализован в программе OOPBUDO (см. колонку 5 в таблицах 1 – 4).

Для реализации второй методики уравнивания (см. формулы (13) – (17)) используются программы KEMNIOOO (6 колонка в таблицах 1 – 4, при порядковых номерах 1 – 3 в первой колонке); KEMNIMMM, для двухкритериального МК и TREX3 – для трёхкритериального МК.

В таблицах 1 – 4 приведены данные по обработке независимых результатов измерений.

Таблица 1

Результаты вычислений. Триангуляция из [3, с. 93]

№ п/п	n	Обозначения	Первая методика уравнивания		Вторая методика уравнивания
			нелинейный метод	линейный метод	
1	2	3	4	5	6
1	2,0	μ	1,003	1,000	1,002
		M_1	0,0523	0,0521	0,0523
		M_2	0,0537	0,0535	0,0536
		M_3	0,0245	0,0244	0,0245
2	1,5	μ	0,981	0,892	0,896
		M_1	0,0664	0,0527	0,0482
		M_2	0,0670	0,0541	0,0498
		M_3	0,0264	0,0246	0,0208
3	2,5	μ	1,045	1,145	1,148
		M_1	0,0541	0,0526	0,0452
		M_2	0,0552	0,0541	0,0461
		M_3	0,0253	0,0246	0,0212
4	Двух	μ	0,987	0,975	0,931
		M_1	0,0479	0,0457	0,0417
		M_2	0,0480	0,0457	0,0417
		M_3	0,0222	0,0201	0,0189
5	Трёх	μ	0,980	0,976	0,883
		M_1	0,0515	0,0482	0,0378
		M_2	0,0518	0,0487	0,0378
		M_3	0,0237	0,0223	0,0178

Таблица 2

Результаты вычислений. Триангуляция из [3, с. 129]

№ п/п	n	Обозначения	Первая методика уравнивания		Вторая методика уравнивания
			нелинейный метод	линейный метод	
1	2	3	4	5	6
1	2,0	μ	1,017	1,000	1,017
		M_1	0,0475	0,0466	0,0475
		M_2	0,0292	0,0286	0,0292
		M_3	0,0387	0,0380	0,0387
2	1,5	μ	1,158	1,042	1,060
		M_1	0,0534	0,0472	0,0403
		M_2	0,0409	0,0290	0,0311
		M_3	0,0423	0,0385	0,0319
3	2,5	μ	0,917	0,988	1,006
		M_1	0,0501	0,0474	0,0418
		M_2	0,0324	0,0291	0,0270
		M_3	0,0416	0,0386	0,0375
4	Двух	μ	0,945	1,019	0,979
		M_1	0,0423	0,0465	0,0455
		M_2	0,0331	0,0305	0,0284
		M_3	0,0423	0,0404	0,0353
5	Трёх	μ	0,929	1,014	0,954
		M_1	0,0423	0,0474	0,0443
		M_2	0,0342	0,0304	0,0296
		M_3	0,0422	0,0404	0,0344

Таблица 3

Результаты вычислений. Триангуляция из [3, с. 153]

№ п/п	n	Обозначения	Первая методика уравнивания		Вторая методика уравнивания
			нелинейный метод	линейный метод	
1	2	3	4	5	6
1	2,0	μ	1,028	1,002	1,027
		M_1	0,0425	0,0414	0,0424
		M_2	0,0440	0,0429	0,0439
		M_3	0,0206	0,0201	0,0206
2	1,5	μ	1,081	0,965	0,988
		M_1	0,0498	0,0420	0,0398
		M_2	0,0556	0,0435	0,0418
		M_3	0,0265	0,0204	0,0181
3	2,5	μ	0,992	1,062	1,087
		M_1	0,0448	0,0416	0,0377
		M_2	0,0463	0,0431	0,0389
		M_3	0,0223	0,0202	0,0189
4	Двух	μ	1,023	1,011	0,999
		M_1	0,0421	0,0406	0,0363
		M_2	0,0437	0,0430	0,0382
		M_3	0,0206	0,0204	0,0188
5	Трёх	μ	0,978	1,016	0,991
		M_1	0,0379	0,0411	0,0387
		M_2	0,0419	0,0435	0,0397
		M_3	0,0229	0,0204	0,0187

Таблица 4

Результаты вычислений. Линейно-угловая сеть из [3, с. 217]

№ п/п	n	Обозначения	Первая методика уравнивания		Вторая методика уравнивания
			нелинейный метод	линейный метод	
1	2	3	4	5	6
1	2,0	μ	0,966	0,972	0,966
		M_1	0,0072	0,0072	0,0072
		M_2	0,0126	0,0126	0,0126
		M_3	0,0113	0,0113	0,0113
2	1,5	μ	0,960	0,884	0,877
		M_1	0,0248	0,0122	0,0201
		M_2	0,0369	0,0231	0,0295
		M_3	0,0393	0,0198	0,0314
3	2,5	μ	1,406	1,544	1,552
		M_1	0,0101	0,0084	0,0085
		M_2	0,0166	0,0137	0,0139
		M_3	0,0158	0,0131	0,0133
4	Двух	μ	1,070	1,199	1,079
		M_1	0,0063	0,0061	0,0058
		M_2	0,0107	0,0097	0,0093
		M_3	0,0107	0,0094	0,0087
5	Трёх	μ	0,970	1,001	0,995
		M_1	0,0070	0,0066	0,0057
		M_2	0,0118	0,0110	0,0095
		M_3	0,0112	0,0105	0,0086

Графическая иллюстрация примеров дана на рисунках 1 – 4.

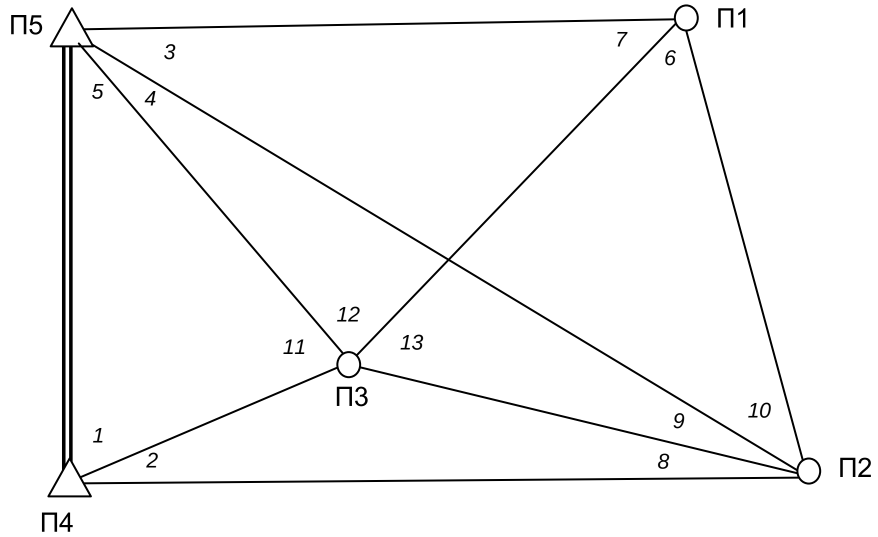

Рис. 1. Сеть триангуляции из [3, с. 93]

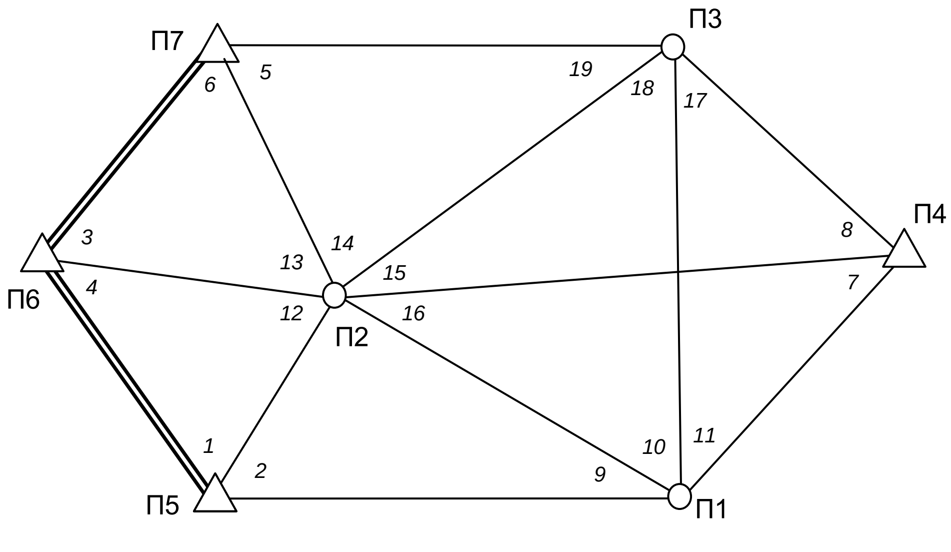

Рис. 2. Сеть триангуляции из [3, с. 129]

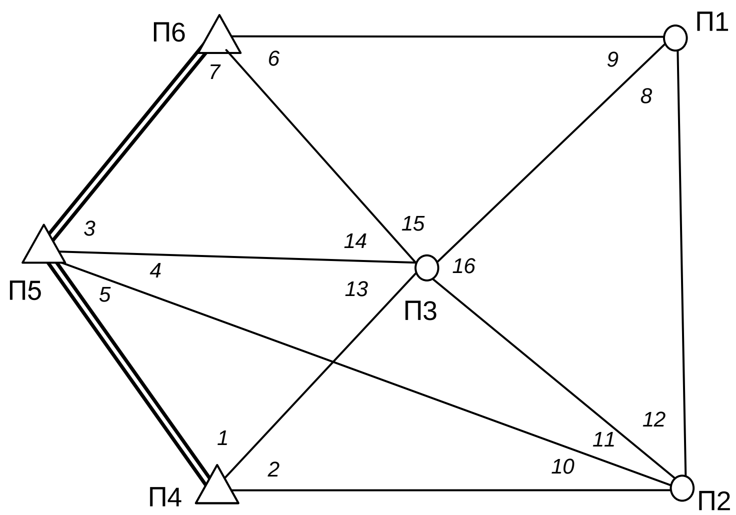

Рис. 3. Сеть триангуляции из [3, с. 153]

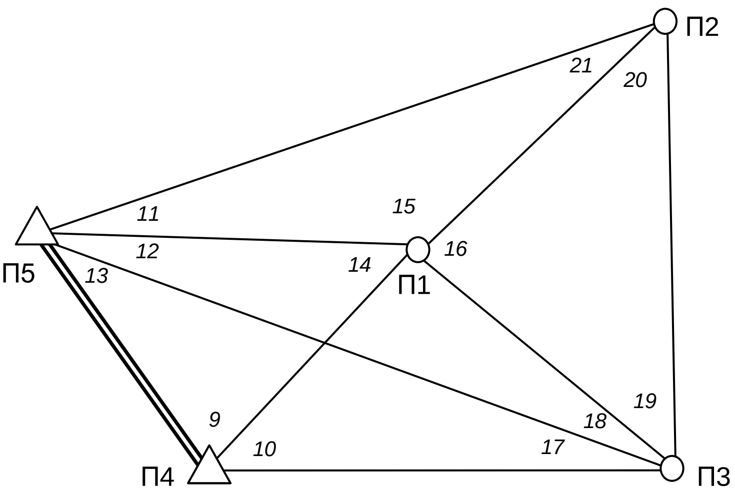

Рис. 4. Линейно-угловая сеть из [3, с. 217]

В таблице 5 для четырёх примеров помещены расчёты, выполненные по программам KEMNIOOO (порядковые номера 1 – 3 в первой колонке); KEMNIMMM (порядковый номер 4) и TREX3 (порядковый номер 5). Результаты таблицы 5 соответствуют случаям, когда измерения были зависимыми, а корреляционная матрица R, используемая в формуле (14), вычислялась по методике, опубликованной в [4, с. 65] для перехода от уравнивания по углам к уравниванию по направлениям.

Таблица 5

Результаты обобщённого метода уравнивания

№ п/п	n	Обозначения	Триангуляция из [3, с. 93]	Триангуляция из [3, с. 129]	Триангуляция из [3, с. 153]	Линейно-угловая сеть из [3, с. 217]
1	2	3	4	5	6	7
1	2,0	μ	1,864	2,656	1,996	1,470
		M_1	0,0248	0,0508	0,0445	0,0053
		M_2	0,0264	0,0224	0,0467	0,0086
		M_3	0,0141	0,0342	0,0181	0,0067
2	1,5	μ	1,502	2,574	1,986	1,266
		M_1	0,0356	0,0399	0,0318	0,0137
		M_2	0,0345	0,0217	0,0514	0,0237
		M_3	0,0143	0,0259	0,0233	0,0254
3	2,5	μ	2,009	2,366	1,891	2,033
		M_1	0,0112	0,0152	0,0118	0,0025
		M_2	0,0111	0,0064	0,0156	0,0039
		M_3	0,0049	0,0103	0,0065	0,0032
4	Двух	μ	1,440	2,204	1,750	1,744
		M_1	0,0140	0,0096	0,0207	0,0018
		M_2	0,0143	0,0058	0,0208	0,0024
		M_3	0,0073	0,0096	0,0118	0,0024
5	Трёх	μ	1,453	2,195	1,688	1,496
		M_1	0,0109	0,0095	0,0042	0,0019
		M_2	0,0109	0,0049	0,0056	0,0031
		M_3	0,0075	0,0095	0,0059	0,0031

По данным таблиц 1 – 5, можно сделать следующие **выводы:**

1) внутреннее содержание таблиц 1 – 4 должно быть одинаковым и равным данным, приведенным в колонке 6 в каждой таблице; одинаковыми оказались лишь расчёты для первых строк МНК (n = 2,0);

2) в таблицах 2 и 3 для n = 1,5 и n = 2,5 (колонка 6) результаты вычислений получились некорректными, так как обобщённый метод Lp-оценок разрабатывался для зависимых измерений, а здесь измерения независимые;

3) из таблиц 1 – 4 данные таблицы 4 для примера 4 оказались самыми логичными и полностью соответствующими теории нетрадиционного уравнивания;

4) данные таблицы 5 для зависимых результатов измерений полностью соответствуют теории обобщённых методов уравнивания Lp-оценок и МК.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркузе, Ю.И. Вычисление и уравнивание геодезических сетей / Ю.И. Маркузе, Е.Г. Бойко, В.В. Голубев; под ред. Ю.И. Маркузе. – М.: Картгеоцентр – Геодезиздат, 1994. – 431 с.
2. Мицкевич, В.И. Альтернативные методы проектирования и уравнивания геодезических сетей / В.И. Мицкевич, А.Ю. Будо, Е.В. Грищенков. – Новополоцк: ПГУ, 2008. – 280 с.
3. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы): учеб. пособие для вузов / Н.В. Яковлев [и др.]. – М.: Недра, 1982. – 368 с.
4. Маркузе, Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1982. – 191 с.

Поступила 26.10.2010

COMPARATIVE ANALYSIS OF ADJUSTMENT RESULTS CONDUCTED APPLYING TWO POLAR METHODS WHEN PROCEEDING PLANE GEODETIC NETWORKS

A. BUDO

Two polar methods of adjustments of plane geodetic networks of triangulation and linear-angular structures by nontraditional approaches: method of Lp-assessments and multi-criteria method of adjustment for treatment of dependent and independent results of measurements. Approaches of adjustment of dependent results are called generalized. One of well-known generalized methods is least square method. But from 2006 generalized method of Lp-assessments and generalized multi-criteria method are considered. If the results of measurements are independent, the application of generalized methods of adjustment must lead to the same results of mathematical treatment as the methods used only for treatment of independent measurements. In the latter case it is possible to apply nonlinear adjustment of Lp-assessments and multi-criteria method, but results of research shows that adjustment does not give unambiguous results when applying treatment of dependent measurements.